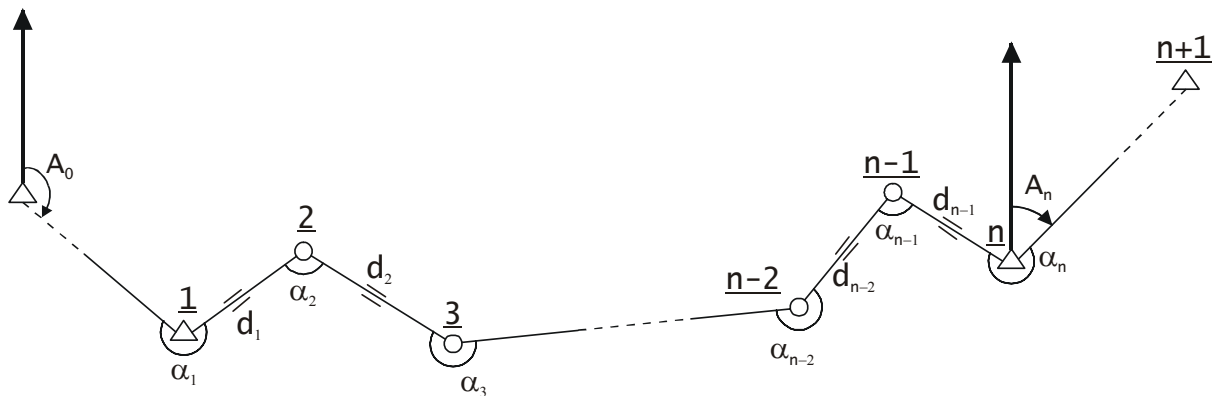


6.11. Obliczenie i wyrównanie sposobem przybliżonym ciągu poligonowego sytuacyjnego obustronnie dowiązanego kąto i liniowo

A. Wprowadzenie

Ciąg poligonowy obustronnie nawiązany kąto i liniowo wraz z oznaczeniami przedstawiony jest na rysunku 6.38.



Rys. 6.38 Ciąg poligonowy obustronnie dowiązany

Obliczenie tego typu ciągu rozpoczynamy od wyznaczenia azymutu początkowego A_0 i końcowego A_n wzorami (6.1) – (6.3) i ich sprawdzenia wzorami (6.12) – (6.14).

Suma teoretyczna kątów w ciągu obustronnie nawiązanym wynosi:

- dla kątów lewych

$$[\alpha]_t = A_n - A_0 + n \cdot 180^0 \quad (6.81)$$

- dla kątów prawych

$$[\beta]_t = A_0 - A_n + n \cdot 180^0 \quad (6.82)$$

Odchyłkę kątową wyznaczamy wzorami

$$f_\alpha = [\alpha]_p - [\alpha]_t \quad (6.83)$$

oraz

$$f_\beta = [\beta]_p - [\beta]_t$$

gdzie

$[\alpha]_p, [\beta]_p$ - suma kątów pomierzonych

Odchyłkę kątową można także liczyć jako różnicę azymutów ostatniego boku ciągu:

$$f_\beta = A'_n - A_n \quad (6.84)$$

gdzie

$$A'_n = A_0 - n \cdot 180^\circ + [\alpha]_p \quad (6.85)$$

lub

$$A'_n = A_0 + n \cdot 180^\circ - [\beta]_p \quad (6.86)$$

Obliczona odchyłka powinna spełniać warunek:

$$f_\beta \leq f_{\beta_{dop}} \quad (6.87)$$

gdzie

$$f_{\beta_{dop}} = m_0 \sqrt{n} \quad (6.88)$$

m_0 - średni błąd pomiaru kąta.

W ciągach sytuacyjnych zakładanych w celu zagęszczenia osnowy pomiarowej pomiary kątowe należy wykonać w taki sposób ażeby średni błąd:

$m_0 \leq 60''$ ($180''$) - dla ciągów o długości do 1,2 km,

$m_0 \leq 30''$ ($90''$) - dla ciągów o długości większej od 1,2 km.

Dopuszczalne odchyłki $f_{\beta_{dop}}$ stabelaryzowane są w Instrukcji G-4 [11] zał. 2 str. 68.

Jeżeli warunek (6.87) jest spełniony, to można przystąpić do rozrzucenia odchyłki kątowej; przy czym wymieniona instrukcja dopuszcza możliwość przekroczenia wartości $f_{\beta_{dop}}$ dla około 30% ciągów. W tym przypadku odchyłka nie może jednak przekroczyć podwójnej wartości $f_{\beta_{dop}}$.

Poprawki do poszczególnych ciągów powinny spełniać warunek:

$$v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + \dots + v_{\beta n} + f_\beta = 0 \quad (6.89)$$

przy założeniu

$$m_{\beta 1} = m_{\beta 2} = \dots = m_{\beta n} = m_0$$

można przyjąć

$$v_{\beta 1} = v_{\beta 2} = \dots = v_{\beta n} = v_{\beta i}$$

stąd z równania warunkowego (6.89) wynika, że

$$n \cdot v_{\beta i} + f_\beta = 0$$

a zatem

$$v_{\beta i} = -\frac{f_\beta}{n} \quad (6.90)$$

Z wzoru (6.90) wyprowadzamy wniosek, że w ciągu poligonowym odchyłkę kątową rozrzuca się w formie jednakowej poprawki na każdy pomierzony kąt ze znakiem przeciwnym do znaku odchyłki, a więc

$$\bar{\beta}_i = \beta_i + v_{\beta_i}$$

gdzie

$\bar{\beta}_i$ - kąt wyrównany

Poprawki wpisuje się kolorem czerwonym w formularzach obliczeniowych nad wartościami kątów pomierzonych.

Na podstawie kątów wyrównanych wylicza się azymuty wyrównane kolejnych boków wzorami:

- dla kątów lewych

$$A_i = A_{i-1} + \alpha_i - 180^0 \quad (6.91)$$

- dla kątów prawych

$$A_i = A_{i-1} - \beta_i + 180^0 \quad (6.92)$$

Obliczenie kolejnych azymutów boków wykonywane jest sukcesywnie w oparciu o azymut boku poprzedniego, aż do kontrolnego obliczenia azymutu końcowego A_n :

$$A_n = A_{n-1} + \alpha_n - 180^0$$

lub

$$A_n = A_{n-1} - \beta_n + 180^0 \quad (6.93)$$

który porównujemy z wartością tegoż azymutu wyliczoną ze współrzędnych (wartość ta wpisana jest do formularza obliczeniowego).

Mając azymuty wyrównane poszczególnych boków obliczamy przyrosty współrzędnych:

$$\Delta X_i = d_i \cos A_i ; \quad \Delta Y_i = d_i \sin A_i \quad (6.94)$$

które sprawdzamy wykonując obliczenia kontrolne wzorami:

$$\Delta X_i = S + C ; \quad \Delta Y_i = S - C \quad (6.95)$$

gdzie

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} d_i \sin(A_i + 45^0); \quad C = \frac{\sqrt{2}}{2} d_i \cos(A_i + 45^0) \quad (6.96)$$

Po obliczeniu i sprawdzeniu przyrostów sumujemy przyrosty i określamy odchyłki

$$f_x = [\Delta X]_p - [\Delta X]_t ; \quad f_y = [\Delta Y]_p - [\Delta Y]_t \quad (6.97)$$

$$f_L = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (6.98)$$

gdzie

$[\Delta X]_p, [\Delta Y]_p$ - sumy przyrostów wyznaczonych z elementów pomierzonych,

$[\Delta X]_t, [\Delta Y]_t$ - teoretyczna suma przyrostów

$$\Delta X_t = X_n - X_1$$

$$\Delta Y_t = Y_n - Y_1 \quad (6.99)$$

Sprawdzamy warunek

$$f_L \leq f_{Ldop.} \quad (6.100)$$

gdzie

$$f_{Ldop.} = \sqrt{u^2 L + \left(\frac{m_0}{\rho}\right)^2 \frac{(n+1)(n+2)}{12n} L^2 + c^2} \quad (6.101)$$

L – długość ciągu,

u – współczynnik błędów przypadkowych pomiaru liniowego,

m_0 – średni błąd pomiaru kąta,

n – liczba boków w ciągu,

c = 0,10 – wpływ błędów położenia punktów nawiązania.

Należy zwrócić uwagę, że wzór (6.101) został podany dla odległości mierzonych przymiarami wstęgowymi. Gdy pomiar długości boków poligonowych wykonywany jest dalmierzami elektronicznymi wówczas w tym wzorze $u^2 L$ należy zastąpić $na^2 + 2a \cdot b \cdot 10^{-6} L$. Oznaczenia: a oraz b, są elementami występującymi we wzorze na średni błąd standardowy pomiaru odległości dalmierzem elektronicznym

$$m_1 = \pm(a + b \cdot 10^{-6} L) \quad (6.102)$$

gdzie:

a – parametr o charakterze stałym w [mm]

b – współczynnik błędów zależnych od odległości l w [km].

Dla około 30% ciągów może być spełniony warunek

$$f_L \leq 2 f_{Ldop.} \quad (6.103)$$

Wartości odchyłki $f_{Ldop.}$ stabelaryzowane są w Instrukcji G-4 [11] zał. 3.

Jeśli warunek (6.100) i (6.103) są spełnione to można przystąpić do rozrzucenia odchyłki f_x i f_y na poszczególne przyrosty, w formie poprawek $v_{\Delta x_i}$ i $v_{\Delta y_i}$

Poprawki te powinny spełniać warunek:

$$v_{\Delta x_1} + v_{\Delta x_2} + \dots + v_{\Delta x_{n-1}} + f_x = 0 \quad (6.104)$$

oraz

$$v_{\Delta y_1} + v_{\Delta y_2} + \dots + v_{\Delta y_{n-1}} + f_y = 0 \quad (6.105)$$

Poszczególne przyrosty wyznaczone są z różnymi błędami średnimi. A zatem posiadają też różne wagi. W związku z tym wyznaczenie poprawek poszczególnych przyrostów wymagałoby rozwiązania równań warunkowych (6.104) i (6.105) z uwzględnieniem wag.

Średnie błędy przyrostów wyznaczmy na podstawie formy funkcji (6.94) przy założeniu, że azymuty wyrównane w zanedbywanym stopniu wpływają na wartości odchyłek f_x i f_y , zatem

$$m_{\Delta x_i} = \cos A_i m_{d_i}; \quad m_{\Delta y_i} = \sin A_i m_{d_i} \quad (6.106)$$

Wagi definiowane są ogólnym wzorem

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

Przyjmując $m_0 = 1$ otrzymamy w rozpatrywanym przypadku

$$p_{\Delta x_i} = \frac{1}{\cos^2 A_i m_{d_i}^2}; \quad p_{\Delta y_i} = \frac{1}{\sin^2 A_i m_{d_i}^2} \quad (6.107)$$

Ze ścisłego rozwiązania równań warunkowych (6.104) i (6.105) z uwzględnieniem wag wynika, że:

$$k_x = \frac{f_x}{\sum_{j=1}^{n-1} p_{\Delta x_j}^{-1}}; \quad k_y = \frac{f_y}{\sum_{j=1}^{n-1} p_{\Delta y_j}^{-1}} \quad (6.108)$$

stąd

$$v_{\Delta x_i} = -p_{\Delta x_i}^{-1} \cdot k_x = -\frac{p_{\Delta x_i}^{-1}}{\sum_{j=1}^{n-1} p_{\Delta x_j}^{-1}} f_x; \quad v_{\Delta y_i} = -p_{\Delta y_i}^{-1} \cdot k_y = -\frac{p_{\Delta y_i}^{-1}}{\sum_{j=1}^{n-1} p_{\Delta y_j}^{-1}} f_y \quad (6.109)$$

gdzie

$$p_{\Delta x_i}^{-1} = \cos^2 A_i m_{d_i}^2; \quad p_{\Delta y_i}^{-1} = \sin^2 A_i m_{d_i}^2 \quad (6.110)$$

zatem

$$V_{\Delta x_i} = -\frac{\cos^2 A_i m_{d_i}^2}{\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2 A_j m_{d_j}^2} f_x; \quad V_{\Delta y_i} = -\frac{\sin^2 A_i m_{d_i}^2}{\sum_{j=1}^{n-1} \sin^2 A_j m_{d_j}^2} f_y \quad (6.111)$$

Należy zaznaczyć, że wzory (6.111) są ogólną formą wzorów na wyznaczenie poprawek przy przybliżonym wyrównaniu ciągów poligonowych.

Dla pomiarów odległości wykonywanych przymiarami wstęgowymi, na przykład w wyrobiskach górniczych, można przyjąć

$$m_{d_i} = u\sqrt{d_i} \quad (6.112)$$

Wprowadzając (6.112) do wzorów (6.111) otrzymamy

$$V_{\Delta x_i} = -\frac{d_i \cos^2 A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j \cos^2 A_j} f_x; \quad V_{\Delta y_i} = -\frac{d_i \sin^2 A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j \sin^2 A_j} f_y \quad (6.113)$$

lub uwzględniając związki (8.94) dojdziemy do postaci

$$V_{\Delta X_i} = -\frac{\Delta X_i \cos A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta X_j \cos A_j} f_x ; \quad V_{\Delta Y_i} = -\frac{\Delta Y_i \sin A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta Y_j \sin A_j} f_y \quad (6.114)$$

Dla wszystkich poprawek określonego ciągu wyrażenia

$$\frac{f_x}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta X_j \cos A_j} = q_x ; \quad \frac{f_y}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta Y_j \sin A_j} = q_y \quad (6.115)$$

są stałe stąd można napisać

$$V_{\Delta X_i} = -q_x \Delta X_i \cos A_i ; \quad V_{\Delta Y_i} = -q_y \Delta Y_i \sin A_i \quad (6.116)$$

Z wyprowadzonych wzorów wynika, że wartość poprawek przyrostów zależy między innymi od azymutu boku dla którego poprawki do przyrostów są liczone.

Dla ciągu prostoliniowego można przyjąć

$$A_1 \approx A_2 \approx \dots \approx A_{n-1} \approx A \quad (6.117)$$

stąd

$$\cos A_1 \approx \cos A_2 \approx \dots \approx \cos A_{n-1} \approx \cos A \quad (6.118)$$

oraz

$$\sin A_1 \approx \sin A_2 \approx \dots \approx \sin A_{n-1} \approx \sin A$$

Uwzględniając te założenia we wzorach (6.113) oraz (6.114) otrzymamy

$$V_{\Delta X_i} = -\frac{d_i}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j} f_x ; \quad V_{\Delta Y_i} = -\frac{d_i}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j} f_y \quad (6.119)$$

oraz

$$V_{\Delta X_i} = -\frac{\Delta X_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta X_j} f_x ; \quad V_{\Delta Y_i} = -\frac{\Delta Y_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta Y_j} f_y \quad (6.120)$$

Otrzymaliśmy wzory, które powszechnie są stosowane w praktyce geodezyjnej. Różne wyrażano poglądy w publikacjach, w sprawie stosowania formy (6.119) lub (6.120). Na podstawie dokonanego wyprowadzenia można stwierdzić, że obie formy są jednakowo słuszne ale tylko przy założeniu prostoliniowego przebiegu ciągu.

Dla przyjętego założenia obie formy są także równoważne gdyż do postaci (6.120) możemy dojść podstawiając we wzorach (6.119) za d_i :

$$d_i = \frac{\Delta X_i}{\cos A_i} \quad \text{lub} \quad d_i = \frac{\Delta Y_i}{\sin A_i}$$

W przypadku pomiaru odległości dalmierzem elektromagnetycznym przyjmuje się najczęściej, że średnie błędy pomiaru są jednakowe, czyli

$$m_{d_1} = m_{d_2} = \dots = m_{d_{n-1}} = m_d$$

Uwzględniając to założenie we wzorach (6.111) otrzymamy

$$V_{\Delta X_i} = -\frac{\cos^2 A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2 A_j} f_x ; \quad V_{\Delta Y_i} = -\frac{\sin^2 A_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \sin^2 A_j} f_y \quad (6.121)$$

lub przyjmując

$$\frac{f_x}{\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2 A_j} = h_x ; \quad \frac{f_y}{\sum_{j=1}^{n-1} \sin^2 A_j} = h_y \quad (6.122)$$

dojdziemy do postaci

$$V_{\Delta X_i} = -h_x \cos^2 A_i ; \quad V_{\Delta Y_i} = -h_y \sin^2 A_i \quad (6.123)$$

Przyjmując założenia (6.117) i (6.118) słuszne dla prostoliniowego przebiegu ciągu otrzymamy na podstawie wzorów (6.121)

$$V_{\Delta X_i} = -\frac{f_x}{n-1} ; \quad V_{\Delta Y_i} = -\frac{f_y}{n-1} \quad (6.124)$$

Wynika stąd wniosek, że odchyłki sum przyrostów w ciągach o przebiegu prostoliniowym w których pomiar odległości wykonywany był dalmierzem elektromagnetycznym można by rozrzucić jednakowo na każdy przyrost.

Po obliczeniu poprawek $V_{\Delta X}$ i $V_{\Delta Y}$ wybranymi wzorami sprawdzamy czy spełniają one równania warunkowe (6.104) i (6.105).

Poprawki wpisywane są do formularza obliczeniowego kolorem czerwonym nad poszczególnymi przyrostami z dokładnością zapisu przyrostów.

Współrzędne wyrównane poszczególnych punktów liczone są wzorami:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \bar{X}_{i-1} + \Delta \bar{X}_{i-1} \\ \bar{Y}_i &= \bar{Y}_{i-1} + \Delta \bar{Y}_{i-1} \end{aligned} \quad (6.125)$$

gdzie

$\Delta \bar{X}_{i-1}, \Delta \bar{Y}_{i-1}$ - przyrosty wyrównane.

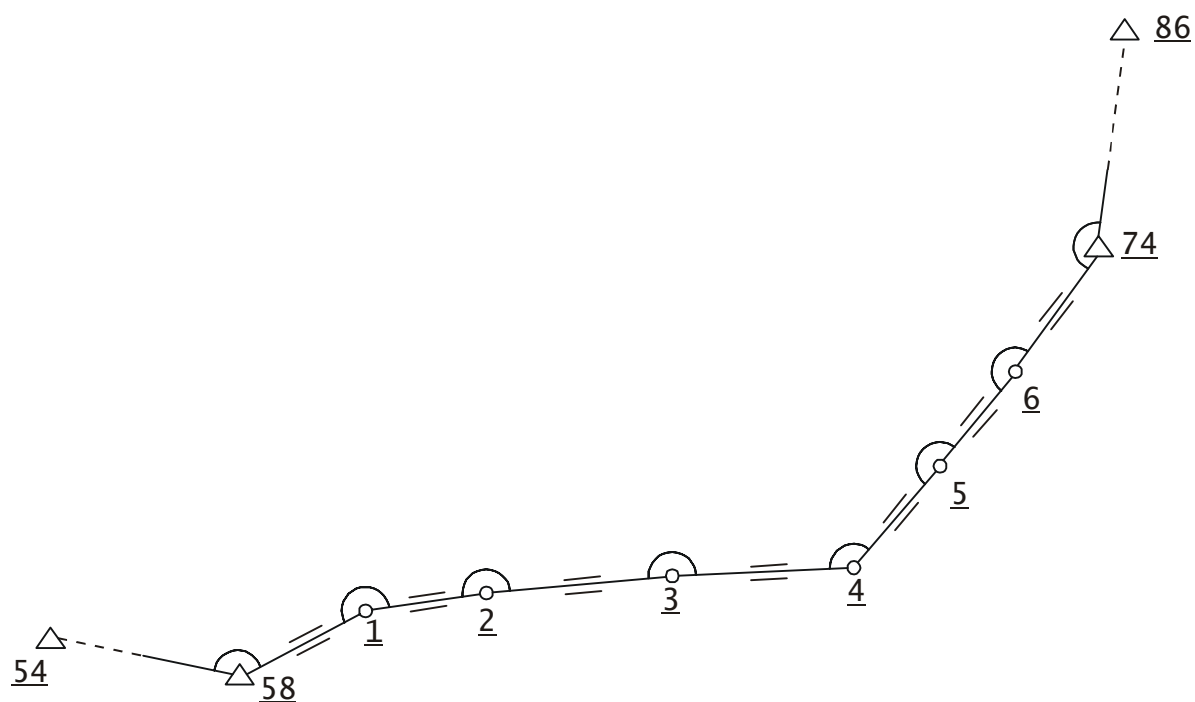
Kontrolę obliczenia współrzędnych stanowi wyliczenie współrzędnych n-tego punktu wzorem

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \bar{X}_{n-1} + \Delta \bar{X}_{n-1} = X_n \\ \bar{Y}_n &= \bar{Y}_{n-1} + \Delta \bar{Y}_{n-1} = Y_n \end{aligned} \quad (6.126)$$

i porównanie wyników ze współzrędnymi X_n, Y_n - danymi katalogowymi tego punktu.

B. Przykład

Obliczyć i wyrównać ciąg poligonowy dwustronnie dowiązany – przedstawiony na rysunku 8.39 w którym odległości pomierzono przyziarnem wstęgowym. Poprawki do przyrostów należy obliczyć tradycyjnymi wzorami (6.119).



Rys. 6.39 Szkic ciągu sytuacyjnego do przykładu obliczeniowego

Realizacja

Dane do obliczeń i wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 6.6.

Tabela 6.6

Część I

Przybliżone obliczenie i wyrównanie ciągu sytuacyjnego obustronnie dowiązanego

Numer ciągu	Numery punktów nawiązania i punktów poligonowych	Średnie wartości kątów Poprawki			Azymuty			Zredukowane długości boków l	CosA _t SinA _t	Przyrosty	
					A _t = A _{t-1} + α - 180 ⁰ 200 ^g					A _t = A _{t-1} - β + 180 ⁰ 200 ^g	
		α - lewe	β - prawe		g	c	cc				
g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc
1	2	3			4			5	6	7	8
	54										
	58	167	90	-10 40	100	72	85				
	1	220	94	-10 77	68	63	15	172,80	0,473 038 0,881 042	+1 81,74	152,24
	2	199	87	-10 82	89	57	82	140,04	0,162 975 0,986 630	+2 22,82	138,17
	3	207	97	-11 58	89	45	54	227,26	0,164 878 0,986 314	+2 37,47	+1 224,15
	4	150	77	-10 42	97	43	01	273,39	0,040 357 0,999 185	+2 11,03	+1 273,17
	5	199	52	-10 02	48	20	33	246,85	0,726 779 0,686 872	+2 179,40	169,55
	6	200	46	-10 92	47	72	25	223,51	0,731 946 0,681 363	+2 163,60	152,29
	74	170	82	-10 52	48	19	07	277,40	0,726 915 0,686 728	+2 201,65	190,50
	86				19	01	49				
	Σα _p =	1518	29	45			[1]	1561,25		[Δx] _p = 697,71 [Δx] _l = 697,84	[Δy] _p = 1300,07 [Δy] _l = 1300,09
	Σα _t =	1518	28	64						f _x = -0,13	f _y = -0,02
	f _α =		+	81						f _l = √(0,13 ² + 0,02 ²) = ±0,13 m	
	f _{α dop} = 90 ^{cc} √8 = 2 ^c 55 ^{cc}									f _{l dop} = ±0,34 m	

